Πχ: Εσωτερικό γινόμενο:

1) $M(n\times n, \mathbb{R})$ δ.χ. $\dim M = n^2$ $\quad \langle \_, \_ \rangle : M(n\times n)\mathbb{R} \times M(n\times n)\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\langle A,B\rangle = trAB^t$

α) $\langle A+A',B\rangle = tr(A+A')B^t = tr(AB^t + A'B^t)$

$\langle A,B\rangle + \langle A',B\rangle = trAB^t + trA'B^t$

β) $\langle \lambda A,B\rangle = tr(\lambda A)B^t = \lambda\, trAB^t = \lambda\langle A,B\rangle$

γ) $\langle B,A\rangle = trBA^t = tr(BA)^t = tr(A^t)^t B^t = trAB^t = \langle A,B\rangle$

δ) $\langle A,A\rangle = trAA^t \geq 0 \quad trAA^t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{it}a_{it} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{it}^2 \geq 0$

$trAB^t = \sum_{i=1}^{n} c_{it} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{it}$

$\langle A,A\rangle = 0 \iff a_{it} = 0 \ \forall i,t \iff A = O_{n\times n}$ με $A=(a_{ij})$

δ' $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b'_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{jt}$ $\quad AB^t = (c_{ij}),\ B=(b_{ij})$

$B^t = (b'_{ij}) = (b_{ji})$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ η γωνία που σχηματίζουν δίνεται από:

$$\cos\phi = \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}$$

3) $P_n[x] = \{f$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n\}$

Ορίζω την $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

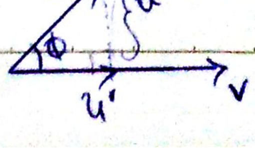
Η απεικόνιση αυτή αποτελεί εσωτερικό γινόμενο

$f(x)=1$ σταθερό πολυώνυμο $\quad \|f(x)\| = \sqrt{\overbrace{\int_0^1 1\cdot 1\,dx}^{\langle f(x),f(x)\rangle}} = \sqrt{1-0} = 1$

$g(x)=x \quad \|g(x)\| = \sqrt{\int_0^1 x\cdot x\,dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)'dx} = \sqrt{\frac{1}{3}-0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Θέλω την προβολή του διανύσματος u στο διάνυσμα v. Τα u,v είναι στοιχεία ευκλείδιου χώρου $\text{προβ}_v(u) = \text{προβ}.\ u$ στο v.

Γεωμετρικά: $\text{προβ}_v(u) = u'$ Το u' βρίσκεται πάνω στο $v \Rightarrow$ το u' είναι πολλαπλάσιο του v.



$\frac{v}{\|v\|} \rightarrow$ έχει μήκος 1 & βρίσκεται πάνω στο v.

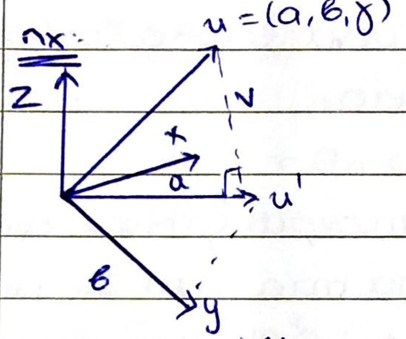
$u' = t\dfrac{v}{\|v\|}$ Το t είναι το πόσο μεγάλο είναι, δηλ. το μήκος του.

$$t = \|u'\| = \cos\varphi \|u\| = \frac{\langle u,v\rangle}{\cancel{\|u\|}\cdot\|v\|}\cdot\cancel{\|u\|}$$

$$u' = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|}\cdot\frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$$

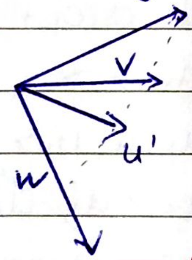
• **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** $u - u' = u - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$. Το $u-u'$ είναι κάθετο στο v, δηλ. το $u - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$ είναι $\perp$ στο v

πχ:



$$\|u\|^2 = \|u'\|^2 + \underbrace{\|v\|^2}_{\gamma} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

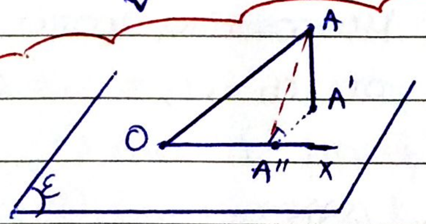
Ζητάω την προβολή του u στον υπόχωρο που δημιουργείται από τα διανύσματα v και w



$\text{προβ}_{(v,w)}(u)$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν το $v \perp w$, από το θεώρημα των καθέτων: $\text{προβ}_{(v,w)}(u) = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v + \dfrac{\langle u,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\cdot w$

Θ.3.Κ.



Οx ημιευθεία πάνω στο επίπεδο ε
Το σημείο Α όχι.
$AA' \perp (\varepsilon)$, $A'A'' \perp Ox$ και $A'A''$ βρίσκεται στο (ε).
Το τμήμα $AA'' \perp OA$

Αν τα u και v δεν είναι $\perp$ τότε για να χρησιμοποιήσω τον τύπο θα πρέπει να γίνουν $\perp$. Αυτό θα γίνει με τη διαδικασία Gram-Schmidt

πχ: Στον $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και ζητάω την προβολή του $u=(1,1,1)$ στον υπόχωρο που σχηματίζουν τα

$\perp$: κάθετο

No. Date

$v=(3,1,1)$ κ' $w=(-1,2,1)$ $\pi\rho o\beta_{(v,w)}(u)$ Εξετάζω αν $v\perp w$;

$<(3,1,1),(-1,2,1)> = 3(-1)+1\cdot 2+1\cdot 1=0$ άρα $v\perp w$.

$$\pi\rho o\beta_{(v,w)}(u) = \pi\rho o\beta_v(u) + \pi\rho o\beta_w(u) = \frac{<u,v>}{<v,v>}v + \frac{<u,w>}{<w,w>}\cdot w$$

$<(1,1,1),(3,1,1)> = 5$

$<(1,1,1),(-1,2,1)> = 2$

$<(3,1,1),(3,1,1)> = 11$

$<(-1,2,1),(-1,2,1)> = 6$

$$\pi\rho o\beta_{(v,w)}(u) = \frac{5}{11}(3,1,1) + \frac{2}{6}(-1,2,1) =$$

$$= \left(\frac{15}{11} - \frac{2}{6}, \frac{5}{11} + \frac{4}{6}, \frac{5}{11} + \frac{2}{6}\right) =$$

$$= \left(\frac{29}{33}, \frac{37}{33}, \frac{26}{33}\right)$$

- **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Σ' έναν ευκλείδιο χώρο ένα σύνολο ορθογωνίων διανυσμάτων είναι γραμ. ανεξάρτητο.

* **Απόδειξη:** Δίνεται ότι το $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ορθογώνιο. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα αυτά είναι $\perp$ μεταξύ τους άρα $<u_i, u_j> = 0$ για $i\neq j$. Θέλω $a_1u_1 + \dots + a_ku_k = \bar{0}$ αν-ν $a_i=0$. Έστω $<a_1u_1+\dots+a_ku_k, u_1> = <\bar{0}, u_1> = 0$

$$\overset{\shortparallel}{<a_1u_1, u_1> + \dots + <a_ku_k, u_1>} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1<u_1, u_1> + \dots + a_k\underbrace{<u_k, u_1>}_{0} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1\|u_1\|^2 = 0 \\ \|u_1\| \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = 0.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνω ότι $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

- **Ερώτημα:** Ισχύει κ' το ανάποδο; δλδ: Αν τα $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι γραμ. ανεξ. $\Rightarrow$ είναι κάθετα μεταξύ τους

ΟΧΙ

Αν το $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι γραμ. ανεξ. μπορώ να αντικαταστήσω με αυτό σύνολο $\perp$ μεταξύ τους; **ΝΑΙ**

No. Date

- **ΟΡΙΣΜΟΙ:** 1) Ένα διάνυσμα u καλείται κανονικό αν $\|u\|=1$.
2) Ένα σύνολο $\{u_1, .., u_r\}$ καλείται ορθοκανονικό αν $\|u_i\|$ κ' $u_i \perp u_j$ για $i \neq j$

πχ: Στον $\mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο η ορθοκανονική βάση $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$
Γιατί βοηθάει μια ορθοκανονική βάση;

- **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Έστω $\{u_1, .., u_n\}$ μια ορθοκανονική βάση κ' $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$. Τότε $a_i = \langle u, u_i\rangle$

* **Απόδειξη:** $\langle u, u_i\rangle = \langle a_1u_1 + \cdots + a_nu_n, u_i\rangle \overset{1,2,8}{=}$
$= a_1\langle \cancel{u_1, u_i}\rangle^{0} + a_2\langle \cancel{u_2, u_i}\rangle^{0} + \cdots + a_i\langle u_i, u_i\rangle + a_{i+1}\langle \cancel{u_{i+1}, u_i}\rangle$
$+ \cdots + a_n\langle \cancel{u_n, u_i}\rangle^{0} = a_i\|u_i\|^2 = a_i$ αν η βάση είναι κανονική.

πχ: Στον $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. ΝΔΟ τα:
$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ κ'

$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση κ' γράψε το $(2,1,5)$ σαν γραμμικό συνδυασμό τους

1) είναι $\perp$ μεταξύ τους.
2) έχουν μήκος 1
3) Να βρεθούν τα a_1, a_2, a_3 ώστε $(2,1,5) \overset{?}{=} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$

$\langle u_1, u_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$

$\langle u_1, u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{12}} = 0$

$\langle u_2, u_3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$

$\|u_3\| = \sqrt{\langle u_3, u_3\rangle} = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = 1$

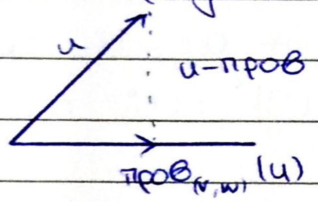
Γνωρίζω ότι $a_1 = \langle u_1, u_1\rangle = \frac{2}{\sqrt2} + 0 + \frac{5}{\sqrt2} = \frac{7}{\sqrt2}$

$a_2 = \langle u_2, u_2\rangle = \frac{-2}{\sqrt3} + \frac{1}{\sqrt3} + \frac{5}{\sqrt3} = \frac{4}{\sqrt3}$

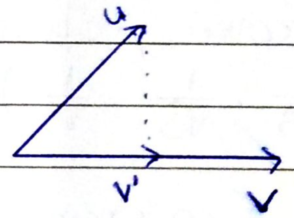
$a_3 = \langle u_3, u_3\rangle = \frac{2}{\sqrt6} + \frac{3}{\sqrt6} - \frac{5}{\sqrt6} = -\frac{1}{\sqrt6}$

- **ΠΟΡΙΣΜΑ:** Αν τα $\{u_1, \dots, u_n\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του ευκλείδιου χώρου V κ' $u \in V$ τότε $u' = \langle u, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle u, u_n\rangle u_n$

Αν τα $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ορθογώνια διανύσματα του V κ' $u \in V$ τότε το διάνυσμα $u - \frac{\langle u, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \dots - \frac{\langle u, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k$ είναι ορθογώνιο με όλα τα $u_1, \dots, u_k$



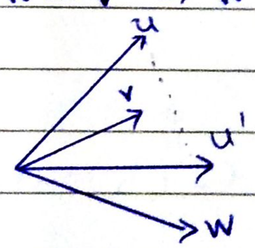
20/03/19



$v' = \pi\rho o\beta_v(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$

$u = v' + w \Rightarrow w = u - v' = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$

$w \perp v' \Rightarrow w = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$ είναι $\perp$ στο v (1)



$u' = \pi\rho o\beta_{(v,w)}(u) \underset{v \perp w}{\overset{\text{όταν}}{=}} \pi\rho o\beta_v(u) + \pi\rho o\beta_w(u) =$

$= \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v + \frac{\langle u, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$

Ισχύει πάλι ότι το $u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v - \frac{\langle u, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$ (2) είναι $\perp$ στο v κ' w

Αν το $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ορθογώνιο, τότε είναι κ' γραμ. ανεξ.

Το αντίστροφο δν ισχύει